

Matematika Mérnököknek 2.

Baran Ágnes, Burai Pál, Noszály Csaba

Gyakorlat Differenciálegyenletek

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Numerikus differenciálás Matlab-bal

Példa

Tegyük fel, hogy az $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.1, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán.

Megoldás. A derivált közelítésére például a következő differenciahányadost használhatjuk (ahol $h > 0$, kicsi érték):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Használjuk a Matlab `diff` függvényét.

Ha y egy n elemű vektor, akkor `diff(y)` egy $(n - 1)$ elemű vektor, az y szomszédos koordinátáinak a különbségeit tartalmazza:

$$\text{diff}(y)=[y(2)-y(1), y(3)-y(2), \dots, y(n)-y(n-1)]$$

Ha adott az alappontok x vektora, és az alappontokban felvett függvényértékek y vektora, akkor

$$d1=\text{diff}(y).\text{/diff}(x)$$

a differenciahányadosok vektora.

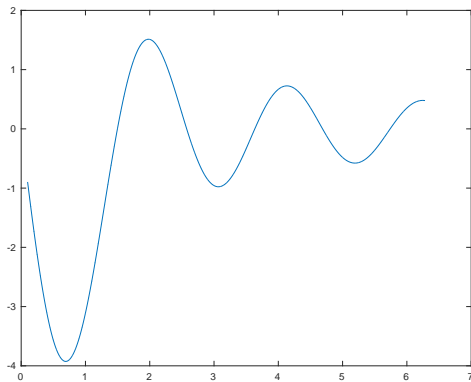
```
>> h=0.001;  
>> x=0.1:h:2*pi;  
>> y=sin(3*x)./x;  
>> d1=diff(y)./diff(x);  
>> figure; plot(x(1:end-1),d1)
```

Megj.: Mivel most az alappontok ekvidisztánsak használhattuk volna a

$$d1=\text{diff}(y)/h;$$

utasítást is.

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d1=diff(y)./diff(x);  
figure; plot(x(1:end-1),d1)
```



Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{3 \cos(3x)}{x} - \frac{\sin(3x)}{x^2}$$

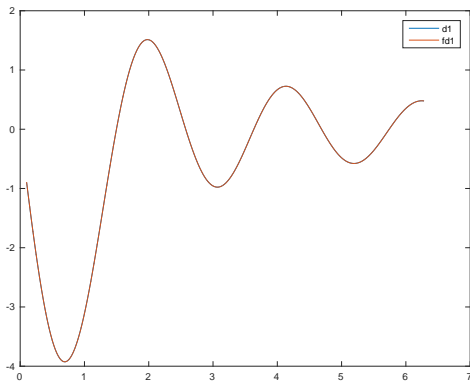
Számítsuk ki ennek értékeit az x -ben adott helyeken, és ábrázoljuk az előző ábrán:

```
>> fd1=3*cos(3*x)./x-sin(3*x)./x.^2;  
>> hold on; plot(x,fd1); hold off
```

Kiszámíthatjuk mekkora a legnagyobb eltérés a $d1$ és $fd1$ elemei között. (Vigyázzunk, a $d1$ vektor eggyel kevesebb elemet tartalmaz, mint az $fd1$.)

```
>> max(abs(fd1(1:end-1)-d1))
```

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d1=diff(y)./diff(x);  
figure; plot(x(1:end-1),d1)  
fd1=3*cos(3*x)./x-sin(3*x)./x.^2;  
hold on; plot(x,fd1); hold off
```



Feladat

- (1) Differenciáljuk az $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ függvényt numerikusan úgy, hogy h értékét változtatjuk (pl. $h = 0.01$, $h = 0.005$, $h = 0.001$), és számítsuk ki a legnagyobb eltérést a derivált pontos értékétől.
- (2) Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sin\left(\frac{100}{x}\right)$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! Ábrázoljuk az eredményt a függvény tényleges deriváltjával közös ábrán. Magyarázzuk meg az eltérést a $\frac{\sin(3x)}{x}$ fv-nél látottakhoz képest.
- (3) Tegyük fel ismét, hogy az $f(x) = \sin\left(\frac{100}{x}\right)$ függvény értékei $h = 0.001$ lépésközzel adottak a $[0.5, 2\pi]$ intervallumon. Deriváljuk numerikusan a függvényt! A derivált közelítését számoljuk a

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

összefüggés alapján. Mit tapasztalunk?

A második derivált közelítése Matlab-bal

Alkalmazzuk a `diff` függvényt kétszer egymás után.

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d1=diff(y)./diff(x);  
d2=diff(d1)./diff(x(1:end-1));  
figure; plot(x(1:end-2),d2)
```

Másik lehetőség: használhatjuk a másodrendű differenciákat előállító `diff(y,2)` utasítást (ez ugyanaz, mint `diff(diff(y))`). Ekkor (felhasználva, hogy `x`-ben az alappontok most h lépésközzel követik egymást)

```
h=0.001;  
x=0.1:h:2*pi;  
y=sin(3*x)./x;  
d2=diff(y,2)/h^2;  
figure; plot(x(1:end-2),d2)
```

Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

1. Példa

Egy tartályban 100 liter, 10 kg sót tartalmazó oldat van. A tartályba folyamatosan vizet vezetünk be, 5 litert percenként (feltételezzük, hogy a befolyó víz keverés következtében egyenletesen oszlik el a tartály egészében). A keverék ugyanilyen sebességgel folyik ki. Mennyi só marad a tartályban 1 óra múlva?

Megoldás:

- $y(t)$: a t -edik időpillanatban a tartályban lévő só mennyisége
- Δt idő alatt mennyit változik a só mennyisége? (Azaz mivel egyenlő $y(t + \Delta t) - y(t)$?)
- A t -edik időpillanatban 5 liter oldatban $\frac{5}{100}y(t)$ kg só van.
- Ha Δt elegendően kicsi, a tartályból Δt idő alatt $\frac{5}{100}y(t)\Delta t$ só távozik.

Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

Az egyenlet:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = -\frac{1}{20}y(t)\Delta t,$$

azaz

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{20}y(t)$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor

$$y'(t) = -\frac{1}{20}y(t).$$

A KDE megoldása:

$$y(t) = C \cdot e^{-\frac{1}{20}t},$$

ahol a C konstans az $y(0) = 10$ kezdeti feltételből határozzuk meg:

$$y(0) = C \cdot e^{-\frac{1}{20} \cdot 0} = C = 10,$$

tehát

$$y(t) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{20}t}, \text{ és } y(60) = 10 \cdot e^{-3} \approx 0.5$$

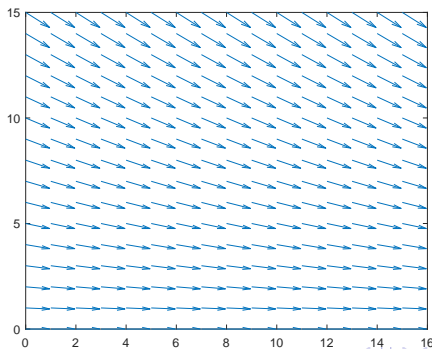
Íránymező

Ha az előbb felírt

$$y'(t) = -\frac{1}{20}y(t)$$

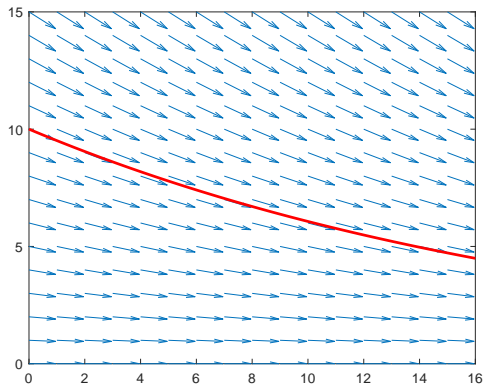
egyenlet $y(t)$ megoldása áthalad a sík (t_0, y_0) pontján, akkor ott a meredeksége $-\frac{1}{20}y_0$.

Rácsozzuk be a sík egy tartományát, és minden rácspontban rajzoljuk be a meredekséget megadó nyilat:



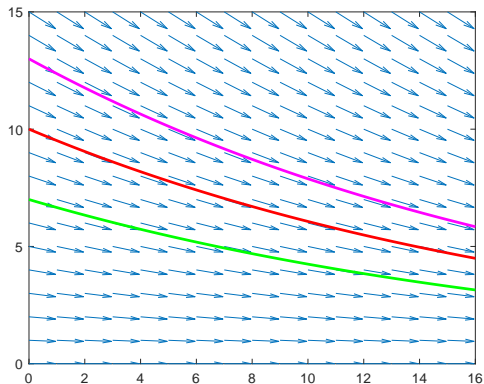
Íránymező

Rajzoljuk rá az ábrára az $y(0) = 10$ kezdeti feltételhez tartozó megoldást:



Íránymező

Ha a kezdeti feltétel $y(0) = 7$, illetve $y(0) = 13$ lenne:



Íránymező Matlab-bal

A quiver függvény segítségével: Ha

- $[T, Y]$ tartalmazza azokat a pontpárokat ahonnan a vektorokat indulnak,
- $[dT, dY]$ a vektorok koordinátáit,

akkor

```
>> quiver(T,Y,dT,dY)
```

kirajzolja az iránymezőt.

Általánosan az $y'(t) = f(t, y(t))$ egyenlet iránymezeje:

```
>> [T Y] = meshgrid(minT:stepsize:maxT, minY:stepsize:maxY);
```

```
>> dY = f(T,Y);
```

```
>> dT = ones(size(dY));
```

```
>> quiver(T,Y,dT,dY);
```

Példa

Rajzoltassuk ki az $y'(t) = -\frac{1}{20}y(t)$ KDE iránymezejét a $[0, 15] \times [0, 15]$ tartományban.

- „Rácsozzuk be” a tartományt, mindkét irányban valamilyen, most pl. 1-es lépésközzel:

```
>> t=0:15; y=0:15;  
>> [T,Y]=meshgrid(t,y);
```

Ekkor T és Y is 16×16 -os mátrix:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 14 & 15 \\ 0 & 1 & \dots & 14 & 15 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & \dots & 14 & 15 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ 15 & 15 & \dots & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

(A T és Y mátrixokat „egymásra helyezve” megkapjuk az összes lehetséges (t_i, y_j) párt)

- A $[T, Y]$ minden eleméhez állítsuk elő a vektorokat:
>> $dY = -Y/20;$
>> $dT = \text{ones}(\text{size}(dY));$
- Rajzoltassuk ki az iránymezőt:
>> $\text{quiver}(T, Y, dT, dY);$

Összefoglalva:

```
>> t=0:15; y=0:15;  
>> [T,Y]=meshgrid(t,y);  
>> dY=-Y/20;  
>> dT=ones(size(dY));  
>> quiver(T,Y,dT,dY);
```

Feladat

(a) Rajzoltassa ki az

$$y' = x + y + 2$$

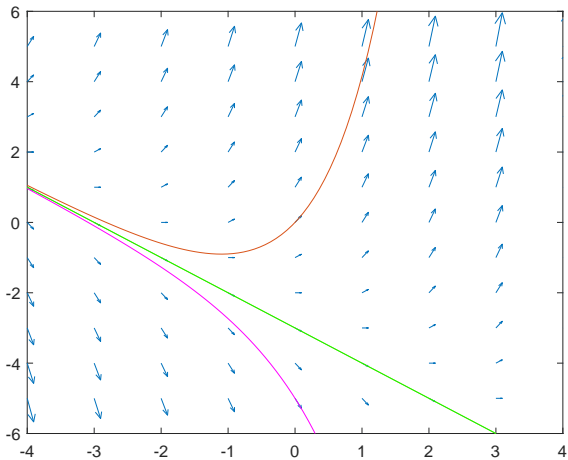
KDE iránymezejét a $[-4, 4] \times [-6, 6]$ tartományon.

(b) Ellenőrizze, hogy az $y(x) = -x - 3 + k \cdot e^x$ függvény (ahol k konstans) megoldja az egyenletet.

(c) Rajzoltassa rá az iránymezőre az

- ▶ $y(0) = 0,$
- ▶ $y(0) = -3,$
- ▶ $y(0) = -5$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldást.



Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

2. Példa

Egy csónak mozgása a víz ellenállásának hatására lassul. A csónak kezdősebessége 1.5 m/s, 4 s múlva pedig 1 m/s sebességgel halad. Mikorra csökken a sebessége 1 cm/s-ra, ha a víz ellenállása egyenesen arányos a csónak sebességével?

Megoldás:

$v(t)$: a csónak sebessége a t -edik másodpercben (m/s)

A KDE:

$$v'(t) = k \cdot v(t)$$

A peremfeltételek:

$$v(0) = 1.5 \quad \text{és} \quad v(4) = 1.$$

Példák differenciálegyenletekkel megoldható feladatokra

A KDE megoldása:

$$v(t) = C \cdot e^{kt}.$$

Felhasználva a peremfeltételeket:

$$v(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C = 1.5,$$

$$v(4) = 1.5 \cdot e^{k \cdot 4} = 1 \implies k = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1.5} = -0.1014$$

Tehát a megoldás:

$$v(t) = 1.5 \cdot e^{-0.1014t}$$

Mikor lesz a sebesség 1 cm/s, azaz 0.01 m/s?

$$0.01 = 1.5 \cdot e^{-0.1014t} \implies t = -\frac{1}{0.1014} \ln \frac{0.01}{1.5} = 49.415$$

Szimbolikus megoldás Matlab-bal

Példa

Oldjuk meg az előző példában megjelenő differenciálegyenletet a Matlab `dsolve` függvényével!

A `dsolve(eqn)` utasítással a szimbolikus alakban adott `eqn` egyenletet oldhatjuk meg.

Az

$$v'(t) = k \cdot v(t)$$

egyenletet szeretnénk megoldani, ehhez először definiáljuk a k és $v(t)$ szimbolikus mennyiségeket:

```
>> syms k v(t)
```

Adjuk meg szimbolikusan az egyenletet:

```
>> eqn= diff(v,t)==k*v
```

Szimbolikus megoldás Matlab-bal

A megoldás a `dsolve` függvénnyel:

```
>> dsolve(eqn)
ans=
    C1*exp(k*t)
```

A $C1$ konstans meghatározásához a $v(0) = 1.5$ feltételre is szükségünk van.

```
>> syms k v(t);
>> eqn= diff(v,t)==k*v;
>> cond1= v(0)==1.5;
>> dsolve(eqn,cond1)
ans=
    (3*exp(k*t))/2
```

Feladatok

- (1) Egy test 10 perc alatt 100 C fokról 60 C fokra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét konstans 20 C foknak tekinthetjük. Mikor hűl le a test 25 C fokra, ha a test hűlésének sebessége egyenesen arányos a test és az őt körülvevő levegő hőmérsékletének különbségével?
- (2) Keressük meg azokat a görbéket, melyek esetében bármely érintőnek az x -tengellyel vett metszéspontja fele akkora, mint az érintési pont x -koordinátája.
- (3) Egy 10 liter vizet tartalmazó edénybe literenként 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel és a keverék 2 liter/perc sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?
- (3) Egy 200 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid van. A ventilátor percenként 20 m^3 0.04% CO_2 tartalmú levegőt fúj a helyiségbe, Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a CO_2 mennyiség a harmadára?

Differenciálegyenletek osztályozása

Feladat

Válassza ki az alábbi egyenletek közül a közönséges, illetve a parciális differenciálegyenleteket!

a) $x'x''x''' = \frac{\partial y}{\partial t_1},$

b) $x'x''x''' = \cos(t)$

c) $\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0$

d) $a\ddot{x} = \dot{x}$

e) $T' = -kT$

f) $\partial_1 z + \partial_2 z = -\partial_1^2 z$

g) $x'' - \cos(t)x' + x = e^x$

Differenciálegyenletek osztályozása

Feladat

Melyik lineáris és melyik nem az alábbi egyenletek közül? A nemlineáris esetben melyik a nemlinearitást okozó tag?

(a) $y' = x + y + 2$

(b) $x' - xt^2 = 3t^3$

(c) $y' - y^2x + x = 0$

(d) $x' = x \cos(t) + t^2$

(e) $x' - te^x + \sin(t) = 0$

(f) $u'(1 + t) = u \cos(t) - u - e^t$

Egyszerűen integrálható feladatok

Feladat

Adja meg a következő egyenletek általános megoldását!

(a) $x' = \sin(t)$

(b) $y' = \frac{1}{1+x}$

(c) $y' = \sqrt{x+2}$

(d) $u' = t(t+1)$

(e) $x' = e^{t-3}$

(f) $y' = (2t+1)^3$

(g) $x' = \cos(t) + t^2 - e^t$

Szeeparábilis differenciálegyenletek

Feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve kezdetiérték problémákat!

(a) $x' = t \cdot x$

(b) $y' = e^{y+2}$

(c) $u' = u(u + 1)$

(d) $y' = 1 - y$ és $y(0) = 2$

(e) $y' = \frac{x^2}{y+2}$

(f) $(1 + x)yy' = 1$

(g) $3u' + \cos(x)u^2 = 0$ és $u(0) = 1$

(h) $t(t - 1)x' + x(x - 1) = 0$

Feladat

Az előző feladatban szereplő egyenleteket oldja meg a Matlab `dsolve` függvényével!

Lineáris inhomogén differenciálegyenlet

Példa

Oldjuk meg az $x(y' - y) = e^x$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Az egyenletet átrendezve az

$$y' = y + \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk.

- Oldjuk meg az $y' = y$ homogén egyenletet!
Ennek megoldása az $y = C \cdot e^x$ függvény, ahol C konstans.
- Konstans variálás: tekintsük a konstanst x -től függőnek:

$$y = C(x) \cdot e^x$$

Lineáris inhomogén differenciálegyenlet

Helyettesítsünk vissza az eredeti egyenletbe:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x}_{y'} = \underbrace{C(x) \cdot e^x}_y + \frac{e^x}{x}$$

Innen

$$C'(x) \cdot e^x = \frac{e^x}{x} \implies C'(x) = \frac{1}{x},$$

azaz

$$C(x) = \ln|x| + K,$$

ahol K konstans.

A megoldás tehát:

$$y = (\ln|x| + K)e^x$$

Lineáris inhomogén differenciálegyenlet

Feladatok

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

$$(1) y' = x + y + 2$$

$$(2) xy' - 2y = 2x^4$$

$$(3) x^2y' + xy + 1 = 0$$

$$(4) y' = 2x(x^2 + y)$$

Feladat

Oldja meg az előző egyenleteket a Matlab `dso1ve` függvényével!

Bernoulli-féle differenciálegyenlet

Példa

Oldjuk meg az $y' + 2y = y^2 e^x$ differenciálegyenletet.

Megoldás: Az egyenlet $y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0$ alakú Bernoulli egyenlet ($g(x) \equiv 2$, $h(x) = -e^x$, $\alpha = 2$), az $y = 0$ triviális megoldás.

Szorozzuk meg az egyenletet $(1 - \alpha)y^{-\alpha} = -y^{-2}$ -nal:

$$-\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{y} = -e^x$$

Legyen $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$. Ekkor $z' = -y^{-2}y'$ és

$$z' - 2z = -e^x$$

Ez egy inhomogén lineáris egyenlet.

- A $z' - 2z = 0$ homogén egyenlet megoldása: $z = C \cdot e^{2x}$
- A konstans variálása:

$$z' = C' \cdot e^{2x} + 2C \cdot e^{2x}$$

amiből

$$\underbrace{C' \cdot e^{2x} + 2C \cdot e^{2x}}_{z'} - 2 \underbrace{C \cdot e^{2x}}_z = -e^x \implies C' \cdot e^{2x} = -e^x$$

azaz

$$C' = -e^{-x} \implies C = e^{-x} + K$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$z = e^x + Ke^{2x}$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai

$$y = \frac{1}{e^x + Ke^{2x}} \quad \text{és} \quad y = 0$$

Bernoulli egyenlet

Példa

Oldjuk meg az előző $y' + 2y = y^2 e^x$ Bernoulli egyenletet a Matlab `dsolve` függvényével.

Megoldás.

```
>> syms y(x)
>> eqn=diff(y)+2*y==y^2*exp(x);
>> dsolve(eqn)
```

ans =

$$0$$
$$\exp(-2*x)/(C5 + \exp(-x))$$

Tehát 2 megoldást kaptunk: $y \equiv 0$ és $y = \frac{e^{-2x}}{C + e^{-x}}$.

Utóbbinak a számlálóját és a nevezőjét is e^{2x} -szel szorozva megkapjuk az általunk kiszámolt megoldást: $y = \frac{1}{C e^{2x} + e^x}$.

Bernoulli egyenlet

Feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

(a) $xy^2y' = x^2 + y^3$

(b) $y' = y^4 \cos(x) + y \tan(x)$

(c) $x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0$

Feladat

Oldja meg az előző egyenleteket a Matlab `dsolve` függvényével.

Riccati egyenlet

Példa

Oldjuk meg az

$$y' = (2t - 1)y + (1 - t)y^2 - t$$

egyenletet, ha tudjuk, hogy $y_p \equiv 1$ megoldás.

Megoldás:

Az egyenlet egy $y' = q_0(t) + q_1(t)y + q_2(t)y^2$ alakú ú.n. Riccati egyenlet:

$$y' = \underbrace{(2t - 1)}_{q_1(t)}y + \underbrace{(1 - t)}_{q_2(t)}y^2 - \underbrace{t}_{q_0(t)}$$

Ha ennek ismert egy y_p partikuláris megoldása, akkor tetszőleges y megoldás előáll $y = u + y_p$ alakban, ahol u a következő Bernoulli egyenlet megoldása:

$$u' = (q_1(t) + 2q_2(t)y_p)u + q_2(t)u^2$$

Ez az egyenlet most a következő alakú:

$$u' = (2t - 1 + 2(1 - t) \cdot 1)u + (1 - t)u^2,$$

azaz

$$u' = u + (1 - t)u^2$$

A Bernoulli egyenlet megoldása: szorozzuk meg az egyenletet $-u^{-2}$ -vel:

$$-u^{-2}u' = -u^{-1} + t - 1$$

Legyen $z = u^{-1}$, ekkor $z' = -u^{-2}u'$, és az egyenlet

$$z' = -z + t - 1,$$

ami egy lineáris inhomogén egyenlet z -re.

Oldjuk meg a $z' = -z$ homogén egyenletet! Ennek megoldása:

$$z = Ce^{-t}$$

Konstans variálással oldjuk meg az inhomogén egyenletet:

$$z' = C'e^{-t} - Ce^{-t}$$

így

$$\underbrace{C'e^{-t} - Ce^{-t}}_{z'} = -\underbrace{Ce^{-t}}_z + t - 1$$

azaz

$$C'e^{-t} = t - 1$$

$$C' = (t - 1)e^t$$

$$C = te^t - 2e^t + K$$

így az inhomogén egyenlet megoldása:

$$z = t - 2 + Ke^{-t}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása:

$$z = t - 2 + Ke^{-t}$$

Ebből a Bernoulli egyenlet megoldása:

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1}{t - 2 + Ke^{-t}}$$

Így a Riccati egyenlet általános megoldása:

$$y = u + y_p = \frac{1}{t - 2 + Ke^{-t}} + 1$$

Riccati egyenlet

Példa

Oldjuk meg az előző $y' = (2t - 1)y + (1 - t)y^2 - t$ egyenletet a Matlab `dsolve` függvényével.

Megoldás:

```
>> syms y(t)
>> eqn = diff(y)==(2*t - 1)*y + (1 - t)*y^2 - t;
>> dsolve(eqn)
```

ans =

$$\frac{1}{\exp(t)/(C_6 + \exp(t)*(t - 2)) + 1}$$

Két megoldást kaptunk: $y \equiv 1$ és $y = \frac{e^t}{C_6 + e^t(t-2)} + 1$. Utóbbiban a tört számlálóját és nevezőjét e^{-x} -szel szorozva éppen az előbb kiszámolt megoldást kapjuk.

Riccati egyenlet

Feladat

Oldja meg a következő Riccati egyenleteket a megadott partikuláris megoldások segítségével

a) $y'(x) + 2y(x)e^x - y^2(x) = e^{2x} + e^x, \quad y_p(x) = e^x$

b) $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = y^2(x) + \frac{1}{x^2}, \quad y_p(x) = -\frac{1}{x}$

Feladat

Oldja meg az előző egyenleteket a Matlab `dsolve` függvényével.

Állandó együtthetős, másodrendű, közönséges, differenciálegyenletek

Feladat

Oldja meg a következő egyenletek közül a homogéneket "kézzel" illetve Matlabbal, az inhomogén egyenleteket Matlabbal! Utóbbi esetben ellenőrizze deriválással, hogy a kapott megoldás kielégíti-e az egyenletet!

a) $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0,$

b) $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0,$

c) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$

d) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x},$

e) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{4x},$

f) $y''(x) - y'(x) = 2e^x - x^2,$

g) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin x,$

h) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0,$

i) $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 5e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Magasabb rendű egyenletek

Feladat

Írja át a következő magasabb rendű egyenleteket ekvivalens, egyenletrendszerekre!

a) $y'''(x) - y'(x) = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$,

b) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$,

c) $2xy''(x) + y'(x) = 0$,

d) $2y(x)y'(x) = y''(x)$,

e) $y''(x) = \frac{(y'(x))^2}{y(x)}$,

f) $y'''(x) - 8y(x) = 0$,

g) $y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y(x) = 0$,

h) $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0$,

i) $xy'''(x) - y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$.